Determinante

Determinanta se kao pojam uvodi na sledeći način (*Lajbnicova formula*):

$$\Delta_n = \sum_{\pi \in S_n} (-1)^{\sigma(\pi)} \, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)},$$

gde je $S_n = \{1, 2, ..., n\}$; π je permutacija, tj. bijekcija skupa S_n na samog sebe; suma je po svim $\pi \in S_n$, njih ima $n!$; $\sigma(\pi)$ je ukupan broj inverzija (izmena prirodnog poretka elemenata) permutacije π.

Za zapisivanje determinati koristimo šematski prikaz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Na primer, neka je $S_3 = \{1, 2, 3\}$. Tada postoji $3! = 6$ permutacija ovog skupa:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \pi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$\pi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad \pi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \pi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Za svaku permutaciju π_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$ potrebno je odrediti broj $\sigma(\pi_i)$:

$$\begin{aligned}\sigma(\pi_1) &= 0; \quad \sigma(\pi_2) = 1; \quad \sigma(\pi_3) = 1;\\ \sigma(\pi_4) &= 2; \quad \sigma(\pi_5) = 2; \quad \sigma(\pi_6) = 3.\end{aligned}$$

Odatle je

$$\begin{aligned}\pi_1 &\longmapsto (-1)^0\, a_{11}a_{22}a_{33} = a_{11}a_{22}a_{33};\\ \pi_2 &\longmapsto (-1)^1\, a_{11}a_{23}a_{32} = -a_{11}a_{23}a_{32};\\ \pi_3 &\longmapsto (-1)^1\, a_{12}a_{21}a_{33} = -a_{12}a_{21}a_{33};\\ \pi_4 &\longmapsto (-1)^2\, a_{12}a_{23}a_{31} = a_{12}a_{23}a_{31};\\ \pi_5 &\longmapsto (-1)^2\, a_{13}a_{21}a_{32} = a_{13}a_{21}a_{32};\\ \pi_6 &\longmapsto (-1)^3\, a_{13}a_{22}a_{31} = -a_{13}a_{22}a_{31}.\end{aligned}$$

Dakle, dobijamo

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

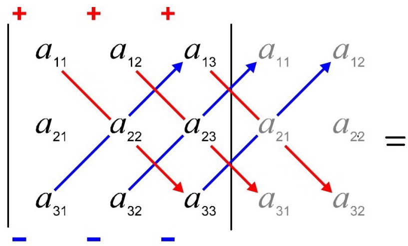
Posebno je

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= |a_{11}| = a_{11};\\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.\end{aligned}$$

Determinante trećeg reda mogu se računati i pomoću *Sarusovog pravila*:

Iza treće kolone polazne determinante trećeg reda dopišu se prva i druga kolona, pa se izmnože elementi na "silaznim" dijagonalama $\searrow$ i dobijeni rezultati saberu. Od toga se oduzme zbir proizvoda elemenata po "uzlaznim" dijagonalama $\nearrow$.

Dakle, važi sledeće:



$$=a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Napomenimo da:

(i) Sarusovo pravilo ne važi za determinante reda $n > 3$;

(ii) Lajbnicova formula je nepraktična za izračunavanje determinati kada je n veliko.

Pravila za rad sa determinantama

1. Ako su u determinanti Δ dve vrste (kolone) jednake, onda je $\Delta = 0$;
2. Ako su u determinanti Δ dve vrste (kolone) proporcionalne, onda je $\Delta = 0$;
3. Zamenom mesta dve vrste (kolone), determinanta menja znak, tj. $\Delta = -\Delta'$;
4. Determinantu množimo brojem α tako što samo elemente jedne vrste (kolone) pomnožimo sa α;
5. Determinanta se ne menja ako se elementima jedne vrste (kolone) dodaju elementi neke druge vrste (kolone) pomnoženi brojem α (u oznaci $\alpha \cdot V_i + V_j \longrightarrow V_j$);
6. Ako elemente i-te vrste (kolone) pomnožene sa α dodamo elementima j-te vrste (kolone) pomnoženim sa β (u oznaci $\alpha \cdot V_i + \beta \cdot V_j \longrightarrow V_j$), tada je $\Delta = \frac{1}{\beta}\Delta'$;
7. Determinanta se ne menja ukoliko vrste zamene mesta sa odgovarajućim kolonama.

8. Ako su elementi i-te vrste oblika $a_{ij} = a'_{ij} + a''_{ij}$, $(j = 1, 2, ..., n)$, tada je $\Delta = \Delta' + \Delta''$, gde su determinante Δ' i Δ'' determinante dobijene iz Δ zamenom elemenata a_{ij} sa a'_{ij} i a''_{ij}.

Algebarski kofaktor ili *algebarski komplement* elementa a_{ij} je izraz

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\,\Delta_{ij},$$

gde je Δ_{ij} determinanta dobijena iz determinante Δ izostavljanjem i-te vrste i j-te kolone.

Na osnovu *Laplasove teoreme*, determinanta n-tog reda Δ jednaka je zbiru proizvoda elemenata proizvoljne vrste (kolone) i njima odgovarajućih kofaktora, tj. Δ se može predstaviti na sledeći način

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad (i = 1, 2, ..., n)\,,$$

odnosno

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, \qquad (j = 1, 2, ..., n)\,.$$

Zadatak 0.1. *Izračunati sledeće determinante:*

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

Rešenje. Važi sledeće:

a)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 = -3$$

b) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 10.$

c) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -10.$ □

Zadatak 0.2. *Izračunati determinantu četvrtog reda*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Rešenje. U ovom zadatku, razvijajući datu determinantu četvrtog reda po prvoj vrsti, problem njenog izračunavanja se svodi na izračunavanje determinanti trećeg reda, odnosno imamo da je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 64.$$

□

Zadatak 0.3. *Izračunati determinante:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & 12 & 2012 & 12 \\ 1 & 11 & 2013 & 13 \\ 1 & 12 & 0 & -1 \\ 1 & 12 & 2012 & 13 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Rešenje. a) Vrednost determinante se ne menja ako se elementima jedne njene vrste (kolone) dodaju odgovarajući elementi druge vrste (kolone) prethodno pomnoženi nekim brojem, zbog toga ćemo prvu vrstu pomnožiti sa -1 i dodati drugoj, trećoj i četvrtoj vrsti. Time dobijamo determinantu čiji su elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, a vrednost takve determinante jednaka je proizvodu elemenata na glavnoj dijagonali. Dakle, dobijamo da je

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 2012 & 12 \\ 1 & 11 & 2013 & 13 \\ 1 & 12 & 0 & -1 \\ 1 & 12 & 2012 & 13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 12 & 2012 & 12 \\ 0 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & -2012 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2012.$$

b) Neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Najpre ćemo vrste zameniti sa kolonama ne menjajući njihov poredak, pri tom se vrednost determinante ne menja, odnosno

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Potom ćemo prvu vrstu sabrati, redom, sa drugom i četvrtom vrstom, a takođe prvu vrstu pomnoženu sa -1 dodaćemo trećoj vrsti. Time dobijamo da je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 3 & 5 & 7 \end{vmatrix}.$$

Dalje ćemo drugu vrstu pomnoženu sa -1 dodati četvrtoj vrsti, pa je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Ako dve vrste zamene mesta, determinanta menja znak, pa ako izvršimo zamenu mesta treće i četvrte vrste dobićemo da je

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{vmatrix}.$$

Sada ćemo četvrtoj vrsti dodadi treću vrstu pomnoženu sa 3, i na taj način dobićemo determinantu čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, pa je vrednost te determinante jednaka proizvodu elemenata na dijagonali, odnosno važi

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -18.$$

□

Zadatak 0.4. *Izračunati determinante:*

a) $\begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$

Rešenje. Ako su elementima j-te vrste (ili kolone) dodati odgovarjući elementi i-te vrste (ili kolone) prethodno pomnoženi brojem α, koristićemo oznaku $\alpha V_i + V_j \rightarrow V_j$ (ili $\alpha K_i + K_j \rightarrow K_j$). Takođe, ako vrste V_i i V_j (odnosno kolone K_i i K_j) menjaju mesta, korisićemo oznaku $V_i \leftrightarrow V_j$ (odnosno $K_i \leftrightarrow K_j$).

a)

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{r} 3V_5 + V_2 \to V_2 \\ -4V_5 + V_4 \to V_4 \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{Razvoj po koloni } K_3$$

$$= - \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} \quad \begin{array}{r} 2V_2 + V_1 \to V_1 \\ -3V_2 + V_3 \to V_3 \\ -2V_2 + V_4 \to V_4 \end{array}$$

$$= - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} \quad \text{Razvoj po koloni } K_3$$

$$= \begin{vmatrix} -13 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = -1032$$

b)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad -V_1 + V_i \to V_i, \quad i = 2,3,4,5$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad \text{Razvoj po vrsti } V_5$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + 20 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 394$$

□

Zadatak 0.5. *Izračunati determinante:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix}$

Rešenje. a) Drugoj i trećoj vrsti determinante Δ dodaćemo prvu vrstu pomnoženu sa -1, odnosno $-V_1 + V_i \to V_i$, za $i = 2, 3$. Na taj način dobija se

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

Razvijajući datu determinantu po koloni K_1, dobiće se determinanta drugog reda kod koje se iz prve vrste može izdvojiti zajednički činilac $(b-a)$, dok se iz druge vrste može izdvojiti činilac $(c-a)$, pa je

$$\Delta = \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & b+a \\ 1 & c+a \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

b) Slično kao u primeru a) imamo da je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 0 & b-a & b^3-a^3 \\ 0 & c-a & c^3-a^3 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 1 & a^2+ac+c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 0 & ac-ab+c^2-b^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a^2+ab+b^2 \\ 0 & (c-b)(a+b+c) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c).$$

c) Najpre ćemo iz druge kolone izdvojiti činilac b, a potom ćemo izvršiti transformaciju $K_1+K_2+K_3 \to K_1$. Na taj način, svaki element prve kolone biće $a+2$, pa ćemo i $a+2$ izdvojiti ispred determinante.

$$\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = b \begin{vmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a+2 & a & 1 \\ a+2 & 1 & a \end{vmatrix} = b(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}$$

$$= b(a+2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = b(a+2)(a-1)^2.$$

□

Zadatak 0.6. *Izračunati determinantu:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2 & c^2 \\ a^2 & (b+c)^2 & a^2 \\ b^2 & b^2 & (c+a)^2 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Primenjujući transformaciju $-K_1+K_2 \to K_2$, $-K_1+K_3 \to K_3$, dobićemo da je

$$\Delta = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 & c^2-(a+b)^2 \\ a^2 & (b+c)^2-a^2 & 0 \\ b^2 & 0 & (c+a)^2-b^2 \end{vmatrix}.$$

Iz druge i treće kolone možemo izdvojiti faktor $a+b+c$, pa je

$$\Delta = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} (a+b)^2 & c-a-b & c-a-b \\ a^2 & b+c-a & 0 \\ b^2 & 0 & c+a-b \end{vmatrix}$$

Dalje, oduzimajući drugu i treću vrstu od prve, tj. $V_1-V_2-V_3 \to V_1$, imamo da je

$$\Delta = (a+b+c)^2 \begin{vmatrix} 2ab & -2b & -2a \\ a^2 & b+c-a & 0 \\ b^2 & 0 & c+a-b \end{vmatrix} = 2abc\,(a+b+c)^3.$$

□

Zadatak 0.7. *Dokazati da je:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].$$

Rešenje. Neka je

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\Delta &= a^3+b^3+c^3-3abc \\
&= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc \\
&= (a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c) \\
&= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)(a^2-2ab+b^2+b^2-2bc+c^2+c^2-2ac+a^2) \\
&= \frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right].
\end{aligned}$$

□

Zadatak 0.8. *Izračunati determinante:*

a) $\begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix}$, *gde je* $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$, *gde je* $z = e^{i\frac{4\pi}{3}}$,

c) $\begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix}$, *ako* z *zadovoljava jednačinu* $z^5 = 1$.

Rešenje. a) Kompleksan broj $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ predstavićemo u eksponencijalnom obliku $z = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, pa je

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & z & z^2 \\ z^2 & 1 & z \\ z & z^2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2z^3 + z^6 = (1 - z^3)^2,$$

to je

$$\Delta = (1 - (e^{i\frac{2\pi}{3}})^3)^2 = (1 - e^{i2\pi})^2 = 0.$$

b) Kako je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix} = -z^4 + 3z^2 - 2z,$$

to iz $z = e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$, dobijamo da je $z^4 = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -e^{i\frac{\pi}{3}}$ i da je $z^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i\pi} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}} = -e^{-i\frac{\pi}{3}}$, pa je

$$\Delta = e^{i\frac{\pi}{3}} - 3e^{-i\frac{\pi}{3}} + 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 3(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}}) = 6i\sin\frac{\pi}{3} = i3\sqrt{3}.$$

c) Jednačina $z^5 = 1$ ekvivalentna je sa $(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$, tj. ekvivalentna je sa $z = 1$ ili $z^4 + z^3 + z^2 + z = -1$. Kako je

$$\Delta = \begin{vmatrix} z & -z & 0 \\ 0 & z^2 & -1 \\ 1 & z & z+1 \end{vmatrix} = z^4 + z^3 + z^2 + z,$$

to možemo zaključiti da je $\Delta = 4$, ako je $z = 1$, a da je u svim ostalim slučajevima $\Delta = -1$. $\square$

Zadatak 0.9. *Odrediti sve kompleksne brojeve z koji zadovoljavaju jednačinu:*

$$32\begin{vmatrix} z+8 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & z & z+3 \\ z+1 & z-2 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (1+i)^{10}.$$

Rešenje. Najpre ćemo izračunati vrednost determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} z+8 & 1 & -1 & 7 \\ 2 & -1 & z & z+3 \\ z+1 & z-2 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z-1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & z & z+3 \\ z+1 & z-2 & 1 & 4 \\ 9 & 1 & -1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= (z-1)\begin{vmatrix} -1 & z & z+3 \\ z-2 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = (z-1)\begin{vmatrix} z-1 & z & 8z+3 \\ z-1 & 1 & 11 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (z-1)\begin{vmatrix} z-1 & 8z+3 \\ z-1 & 11 \end{vmatrix} = -8(z-1)^3,$$

pa dobijamo da je početna jednačina ekvivalentna sa

$$-256(z-1)^3 = (1+i)^{10}.$$

Sa druge strane imamo da je

$$(i+1)^{10} = (\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})^{10} = 2^5 e^{i\frac{5\pi}{2}} = 2^5 e^{i2\pi} \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 32i,$$

pa je data jednačina ekvivalentna sa

$$(z-1)^3 = -\frac{i}{8},$$

tj.,

$$z = 1 + \sqrt[3]{-\frac{i}{8}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt[3]{e^{-i\frac{\pi}{2}}}.$$

Dalje je

$$z_k = 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{2k\pi - \frac{\pi}{2}}{3}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot e^{i\frac{4k\pi-\pi}{6}}, \quad k = 0, 1, 2,$$

odnosno

$$z_0 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}, \qquad z_1 = 1 + \frac{i}{2}, \qquad z_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{i}{4}.$$

$\square$

Zadatak 0.10. *Izračunati vrednost determinante:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix},$$

ako su α, β, γ *koreni jednačine* $z^3 + pz + q = 0$, $(p, q \in \mathbb{C})$.

Rešenje. Primenjujući transformaciju $K_1 + K_2 + K_3 \to K_1$, dobijamo da je

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\beta+\gamma & \beta & \gamma \\ \alpha+\beta+\gamma & \alpha & \beta \\ \alpha+\beta+\gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma) \begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 1 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \alpha \end{vmatrix}.$$

Koristićemo uopštene Vijetove formule: Ako su z_1, z_2 i z_3 koreni jednačine $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, onda je

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= -\frac{b}{a}, \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 &= \frac{c}{a}, \\ z_1 z_2 z_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

Sada možemo zaključiti da za datu jednačinu $z^3 + pz + q = 0$ i njene korene α, β, γ, važi

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

pa je $\Delta = 0$. $\square$

Zadatak 0.11. *Izračunati vrednost determinante:*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 1 & 1 \\ & ... & & & & \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Ako prvu vrstu prepišemo, a na ostale vrste primenimo transformaciju $-V_1 + V_i \longrightarrow V_i$, $(i = 2, \ldots, n)$, dobićemo da je

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & ... & 0 & 0 \\ & ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}.$$

$\square$

Zadatak 0.12. *Izračunati vrednost determinante:*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & x & x & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & ... & 1 & 1 \\ & ... & & & & \\ 1 & 1 & 1 & ... & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & x \end{vmatrix}$$

Rešenje. Ako na mesto prve kolone pišemo zbir svih kolona, tj. ako primenimo transformaciju $K_1 + K_2 + \cdots + K_n \longrightarrow K_1$, dobićemo da je

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} x+n-1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ x+n-1 & x & x & ... & 1 & 1 \\ x+n-1 & 1 & x & ... & 1 & 1 \\ & ... & & & & \\ x+n-1 & 1 & 1 & ... & x & 1 \\ x+n-1 & 1 & 1 & ... & 1 & x \end{vmatrix}$$

Kako su svi elementi prve kolone jednaki, to izdrvajanjem faktora $(x+n-1)$, dobijamo da je

$$\Delta_n = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 1 & x & x & ... & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & ... & 1 & 1 \\ & ... & & & & \\ 1 & 1 & 1 & ... & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 & x \end{vmatrix}$$

Dalje, za $i = 2, 3, ...n$ moěmo izvršiti transformaciju $-V_1 + V_i \longrightarrow V_i$, čime se dobija da je

$$\Delta_n = (x+n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 \\ 0 & x-1 & & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & ... & 0 & 0 \\ & ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & & & 0 & x-1 \end{vmatrix}$$

Uzastopnim razvijanjem ove determinante po prvoj koloni dobija se da je

$$\Delta_n = (x-1)^{n-1} (x+n-1) .$$

□

Zadatak 0.13. *Izračunati:*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta & & 0 \\ & ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \alpha+\beta \end{vmatrix}_n$$

Rešenje. Razvijajući Δ_n po prvoj koloni dobijamo

$$\Delta_n = (\alpha+\beta) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & ... & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & ... & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & & 0 \\ & ... & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$- \begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & & 0 \\ ... & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\Delta_n = (\alpha+\beta) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & ... & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & ... & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & & 0 \\ & ... & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$-\alpha\beta \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & ... & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & & 0 \\ ... & & & \\ 0 & 0 & ... & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-2}$$

Odavde dobijamo rekurentnu formulu

$$\Delta_n = (\alpha+\beta)\,\Delta_{n-1} + \alpha\beta\Delta_{n-2}.$$

Nizu $\{\Delta_n\}$ možemo pridružiti karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 - (\alpha + \beta)\,\lambda + \alpha\beta = 0,$$

čija su rešenja $\lambda_1 = \alpha$ i $\lambda_2 = \beta$. Opšte rešenje dato je sa

$$\begin{aligned} \Delta_n &= A \cdot \lambda_1^n + B \cdot \lambda_2^n, \\ \Delta_n &= A \cdot \alpha^n + B \cdot \beta^n, \end{aligned}$$

gde se konstante A i B odredjuju iz jednačina

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A\alpha + B\beta = \alpha + \beta, \\ \Delta_2 &= A\alpha^2 + B\beta^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2. \end{aligned}$$

Odavde je $A = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$ i $B = -\frac{\beta}{\alpha-\beta}$, pa je

$$\Delta_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

□

Zadatak 0.14. *Izračunati:*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & ... & 0 & 0 \\ & ... & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Rešenje. Razvićemo Δ_n po prvoj koloni

$$\Delta_n = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-1} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & ... & 0 & 0 \\ ... & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Ako u prvoj od prethodne dve determinante izvršimo razvoj po prvoj koloni, a u drugoj determinanti razvoj po prvoj vrsti dobićemo

$$\Delta_n = 25 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-2} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$-24 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-2}$$

Razvijanjem druge determinante po prvoj vrsti dobijamo

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-2} - 10 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}_{n-3}$$

Dakle,

$$\Delta_n = D_{n-2} - 10D_{n-3}$$

gde je

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sada ćemo izračunati vrednost determinante D_n. Razvijajući D_n po elementima prve kolone dolazimo do rekurentne formule

$$D_n = 3D_{n-1} - 2D_{n-2}.$$

Nizu D_n pridružujemo karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,$$

čija su rešenja

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Dakle, opšte rešenje dato je u obliku

$$D_n = A + B \cdot 2^n.$$

Iz početnih uslova $D_1 = 3$ i $D_2 = 7$, dobijamo da je $A = -1$ i $B = 2$, pa je

$$D_n = 2^{n+1} - 1.$$

Iz ovoga imamo da je

$$\Delta_n = 9 - 2^{n+1}.$$

$\square$